

Classification Analytique D'équations Différentielles $ydy + \dots = 0$ et Espace de Modules

R. Meziani (*)

Abstract. In this paper we study the analytic classification of class of differential equations $\Omega = ydy + \dots = 0$ in $(\mathbb{C}^2, 0)$. We prove that "generically" they are rigid. We also give the moduli spaces in special cases.

Résumé. Dans ce travail, on s'intéresse à la classification analytique de certains types d'équations différentielles de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de la forme $\Omega = ydy + \dots = 0$. Cette classification est en général donnée par celle de l'holonomie projective apparaissant dans la résolution de Ω . Dans un cas spécial la classification est donnée par celles de l'holonomie associée à l'unique séparatrice de Ω . On précise l'espace de modules et on prouve la rigidité générique de Ω .

0. Introduction

1. Terminologie et notations

Soit Ω une 1-forme holomorphe sur une variété complexe M de dimension deux. Elle définit un feuilletage holomorphe \mathcal{F}_Ω de codimension un sur le complémentaire de son lieu singulier $S(\Omega) = \{m \in M \mid \Omega(m) = 0\}$. Le couple $\underline{\mathcal{F}}_\Omega = (\mathcal{F}_\Omega, S(\Omega))$ est appelé feuilletage singulier de M ; si U est une unité, $\mathcal{F}_\Omega = \mathcal{F}_{U\Omega}$. Par abus de langage on confondra $\underline{\mathcal{F}}_\Omega$ et \mathcal{F}_Ω .

Soient \mathbf{O}_n l'anneau des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de fonctions holomorphes, \mathfrak{m}_n son idéal maximal, $\widehat{\mathbf{O}}_n$ et $\widehat{\mathfrak{m}}_n$ les complétés formels respectifs. On note Λ l'ensemble des germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-formes holomorphes à

Received 2 August 1995.

(*) L'auteur remercie l'IRMAR pour l'accueil qu'il a rencontré durant ses séjours (long et courts) à l'institut.

singularité isolée en 0 et $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$) le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes (resp. formels) Φ de $(\mathbb{C}^2, 0)$, tels que $\Phi(0) = 0$. Deux éléments Ω_1 et Ω_2 de Λ , ou encore \mathcal{F}_{Ω_1} et \mathcal{F}_{Ω_2} , sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués, s'il existe un élément Φ de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$) tel que $\Phi^*(\Omega_1) \wedge \Omega_2 = 0$. Un germe de courbe analytique ($f = 0$) est dit séparatrice de $\Omega \in \Lambda$, s'il existe une 2-forme holomorphe η telle que $\Omega \wedge df = f \cdot \eta$. Un élément g de \mathfrak{m}_2 est dit intégrale première de Ω (ou \mathcal{F}_Ω) si $\Omega \wedge dg = 0$.

Soit \mathbb{D} (resp. $\widehat{\mathbb{D}}$) le groupe des germes d'automorphismes holomorphes (resp. formels) de $(\mathbb{C}, 0)$ fixant l'origine. Deux sous groupes H_1 et H_2 de \mathbb{D} sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués s'il existe un élément φ de \mathbb{D} (resp. $\widehat{\mathbb{D}}$) tel que $\varphi^*H_1 = H_2$ avec $\varphi^*H_1 = \{\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi \mid h \in H_1\}$. On note $H_1 \stackrel{\text{an}^t}{\sim} H_2$ (resp. $H_1 \stackrel{ft}{\sim} H_2$). On désigne par H_1^{For} l'ensemble quotient $\{H_2 \mid H_2 \stackrel{ft}{\sim} H_1\} / \stackrel{\text{an}^t}{\sim}$. On dit que H_1 est rigide si H_1^{For} est trivial. De la même façon si $\Omega \in \Lambda$ on note

$$\Omega^{\text{For}} = \{\Omega_1 \in \Lambda \mid \Omega_1 \stackrel{ft}{\sim} \Omega\} / \stackrel{\text{an}^t}{\sim};$$

lorsqu'il est trivial on dit que Ω est rigide.

Deux p -uplets (f_1, f_2, \dots, f_p) et (g_1, g_2, \dots, g_p) de \mathbb{D}^p sont analytiquement (resp. formellement) conjugués s'il existe $\varphi \in \mathbb{D}$ (resp. $\widehat{\mathbb{D}}$) tel que $\varphi^*(f_i) = g_i$ pour $i = 1, \dots, p$; on note $(f_1, \dots, f_p)^{\text{For}}$ l'ensemble:

$$\{(g_1, \dots, g_p) \in \mathbb{D}^p \mid (g_1, \dots, g_p) \stackrel{ft}{\sim} (f_1, \dots, f_p)\} / \stackrel{\text{an}^t}{\sim}.$$

On a une surjection naturelle de $(f_1, \dots, f_p)^{\text{For}}$ sur G^{For} où $G = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$: le groupe engendré. Sauf cas particuliers (vois §4b) que l'on explicitera (voir 4.10), ces deux espaces de modules s'identifient.

Dans la suite on confondra germe en un point et représentant sur un voisinage de ce point; les 1-formes utilisées seront toujours considérées à multiplication par unité près.

2. Résultats

Soit $\Omega = adx + bdy$ un élément de Λ , dégénéré de 1-jet non nul, dégénéré

au sens où la partie linéaire du champ dual

$$X_\Omega = b \partial/\partial x - a \partial/\partial y$$

est nilpotente. A un changement de coordonnées linéaire près, le 1-jet de Ω s'écrit ydy . On sait alors ([T]) que Ω est formellement conjugué à une 1-forme du type:

$$\Omega_\alpha^{n,p} = d(y^2 + x^n) + x^p(\alpha + V(x))dy$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*, V \in \hat{m}_1; n \geq 3, p \geq 2$.

On dit alors que $\Omega \in [\Omega_\alpha^{n,p}]$. Le nombre entier n est un invariant ($n - 1$ est le nombre de Milnor de la singularité), l'entier p l'est lorsque $n \geq 2p$.

On s'intéresse à Ω^{For} . Dans le cas $n < 2p$, Ω a la même résolution que $d(y^2 + x^n)$ et est en général rigide [C, M]: D. Cerveau et R. Moussu ont appliqué leur classification analytique de sous groupes de \mathbb{D} au groupe d'holonomie projective ($[M, M]$) de Ω pour en déduire Ω^{For} . Dans le cas $n = 2p$, le nombre α apparait explicitement dans la classification et même dans la résolution de Ω ; on souligne qu'il devient un invariant au signe près (remarquons que changer x en βx avec $\beta^p = -1$ permet de changer α en $-\alpha$).

On se propose de faire la classification lorsque $n = 2p$. Une des conséquences de notre étude est que l'on a:

“Génériquement sur α , les éléments Ω de $[\Omega_\alpha^{n,p}]$ sont rigides”.

Plus précisément, on distingue deux cas:

$$\Omega \in \Sigma_{n',\alpha}^* \Leftrightarrow \Omega \in [\Omega_\alpha^{2n',n'}] \text{ avec } \alpha \notin \{\pm 2(\sqrt{r} + 1/\sqrt{r})/r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}\}$$

$$\Omega \in \Sigma_{n',4}^{**} \Leftrightarrow \Omega \in [\Omega_4^{2n',n'}] \text{ ou } \Omega \in [\Omega_{-4}^{2n',n'}].$$

Premier cas: $\Omega \in \Sigma_{n',\alpha}^*$

Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage singulier obtenu après résolution (n' éclatements) d'un élément Ω de $\Sigma_{n',\alpha}^*$. On obtient le schéma de résolution suivant (fig. 1):

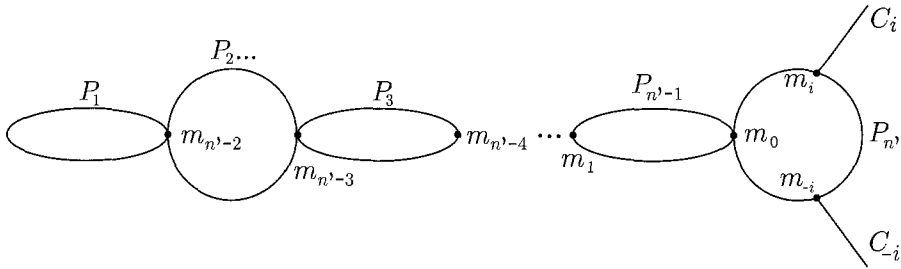


Fig. 1

où le diviseur exceptionnel apparaît comme une chaîne linéaire de n' droites projectives P_k , d'intersections $m_k: k = 0, \dots, n' - 2$ (fig. 1). Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ possède les P_i comme séparatrices, ainsi que deux autres C_i et C_{-i} qui sont transverses au diviseur exceptionnel et coupent $P_{n'}$ en m_i et m_{-i} respectivement. Les $m_k: k = 0, \dots, n' - 2, i, -i$ sont les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$. Les indices de Camacho-Sad [Ca, S] aux trois singularités sur $P_{n'}$ sont

$$\begin{aligned} \mu_{(0)} &= -(n' - 1)/n', \\ \mu_{(i)} &= -1/n'(1 - \alpha_2/\alpha_1)^{-1}, \\ \mu_{(-i)} &= -1/n'(1 - \alpha_1/\alpha_2)^{-1} \end{aligned}$$

où α_2, α_1 sont les racines du trinôme $1 + (\alpha/2)u + u^2$.

Remarquons que $\mu_{(0)} + \mu_{(i)} + \mu_{(-i)} = -1$.

On désigne par H_Ω le groupe d'holonomie projective de $\mathcal{L} = P_{n'} - \{m_0, m_i, m_{-i}\}$. Il est engendré par h_0 et h_i : les holonomies projectives locales de \mathcal{L} en m_0 et m_i . On a:

Théorème 3.1. *Soit Ω_j ($j = 1, 2$) un élément de $\Sigma_{n', \alpha}^*$ et $h_0^{(j)}$ (resp. $h_i^{(j)}$) l'holonomie projective locale de $\tilde{\mathcal{F}}_j$ (résolution de \mathcal{F}_{Ω_j}) au point m_0 (resp. m_i) de $P_{n'}$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués si et seulement si les systèmes de générateurs $(h_0^{(1)}, h_i^{(1)})$ et $(h_0^{(2)}, h_i^{(2)})$ de H_{Ω_1} et H_{Ω_2} le sont.*

Soit λ un nombre irrationnel; on dit que $\lambda \in \mathbb{B}$ s'il vérifie la condition de Brjuno ([Br], [Y]) qui assure la linéarisabilité des difféomorphismes $h(x) = e^{2i\pi\lambda}x + \dots$.

L'espace des modules Ω^{For} est décrit par:

Théorème 4.4. Soit Ω un élément de $\Sigma_{n',\alpha}^*$.

- i) Si $\mu_{(i)}$ est irrationnel et $\mu_{(-i)} \cdot \mu_{(i)} < 0$, alors Ω est rigide.
 ii) Lorsque $\mu_{(i)}$ est un nombre complexe non irrationnel ou $\mu_{(i)}$ irrationnel avec $\mu_{(-i)} \cdot \mu_{(i)} > 0$, on obtient:

$$\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}.$$

Si de plus $H_\Omega \cap \mathbb{D}_1$ n'est pas monogène, alors:

$$\Omega^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}.$$

N.B.: Un groupe est dit monogène s'il est engendré par un seul élément et est non trivial.

Ce théorème ramène l'étude de Ω^{For} à celle de l'espace des modules pour des groupes ou plus précisément des couples d'éléments de \mathbb{D} . En utilisant la classification analytique des sous groupes de \mathbb{D} ($[C, M]$), on a des précisions sur Ω^{For} suivant les valeurs de $\mu_{(i)}$ et la nature de H_Ω :

H_Ω non abélien et $H_\Omega \cap \mathbb{D}_1$ monogène:

on a $\mu_{(i)}$ rationnel

$$\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$$

Ω non rigide

H_Ω abélien et $H_\Omega \cap \mathbb{D}_1$ monogène:

on a $\mu_{(i)}$ rationnel

$$\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$$

Ω rigide $\Leftrightarrow h_i$ périodique

H_Ω non abélien et $H_\Omega \cap \mathbb{D}_1$ non monogène:

$$\Omega^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}$$

Ω rigide

H_Ω abélien et $H_\Omega \cap \mathbb{D}_1$ non monogène:

si $\mu_{(i)} \in \mathbb{B}$ ou $\mu_{(i)}$ non irrationnel

$$\Omega^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}$$

Ω rigide

si $\mu_{(i)} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{B}$ et $\mu_{(i)} \cdot \mu_{(-i)} > 0$

$$\Omega^{\text{For}} \equiv H_{\Omega}^{\text{For}}$$

Ω non rigide

si $\mu_{(i)} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{B}$ et $\mu_{(i)} \cdot \mu_{(-i)} < 0$

$$\Omega^{\text{For}} \not\equiv H_{\Omega}^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$$

Ω rigide

Corollaire 4.6. *Génériquement sur α , un élément Ω de $[\Omega_{\alpha}^{2n',n'}]$ est rigide.*

Deuxième cas: $\Omega \in \Sigma_{n',4}^{**}$.

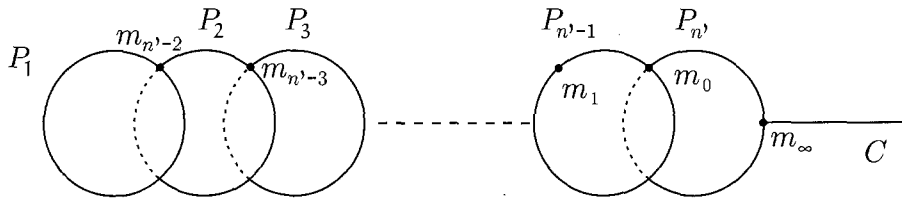


Fig. 2

Cette fois encore, Ω se désingularise après n' éclatements. Mais les deux séparatrices transverses au diviseur exceptionnel viennent collapser pour n' en former plus qu'une. Ceci donne naissance à une singularité réduite m_{∞} avec 1-jet du type ydx . Dans ce cas l'holonomie projective ne donne essentiellement plus de renseignements car elle est finie; curieusement, l'holonomie de la séparatrice transverse au diviseur porte toute l'information, conformément à une conjecture de R. Thom selon laquelle:

“Une 1-forme de Λ ayant un nombre fini de séparatrices est déterminée par la donnée des séparatrices et de leurs holonomies”.

Cette conjecture n'est pas vraie en général [M].

Théorème 6.C.5. *Soient Ω_j ($j = 1, 2$) deux éléments de $\Sigma_{n',4}^{**}$ et h_j l'holonomie de leur séparatrice. Alors Ω_1 et Ω_2 sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués si et seulement si h_1 et h_2 le sont.*

Pour calculer l'espace des modules Ω^{For} , on utilise la classification analytique des 1-formes à 1-jet du type ydx , d'après Martinet-Ramis

$[M, R]_1$. On montre alors que Ω^{For} s'identifie à \mathbb{D}_1 quotienté par les conjugaisons homothétiques de $(\mathbb{C}, 0)$.

Dans les deux cas ($\Omega \in \Sigma_{n', \alpha}^*$ ou $\Omega \in \Sigma_{n', 4}^{**}$), pour réduire la classification de Ω à celle d'une holonomie, on est ramené à "pousser" des difféomorphismes locaux "en haut" (après résolution), par la méthode de relèvement de chemins. On prolonge ensuite en utilisant le théorème clé 1.1 de conjugaison locale fibrée (qui est un raffinement d'un résultat de R. Moussu (1.4)). Ceci nécessitera la construction d'une fibration "singulière" transverse au projectif $P_{n'}$ de la résolution de Ω , telle que les (ou la) séparatrices transverses au diviseur en soient des fibres. Mis à part quelques détails techniques, l'étude et les résultats dans le cas $n' = 2$ sont les mêmes que dans le cas général. Aussi on traitera ici le cas $n' = 2$.

1. Conjugaisons fibrées et holonomie

Définitions. Un élément Ω de Λ est dit réduit ($[\mathbb{C}, \text{Ma}]$) si les valeurs propres λ_1 et λ_2 de X_Ω (un champ dual) vérifient l'une des conditions:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0; \quad \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+ \tag{*}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0. \tag{**}$$

On dit qu'un difféomorphisme (φ_1, φ_2) de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ est fibré en x si $\varphi_1(x, y) \equiv x$.

Théorème 1.1. *Soit Ω_j ($j = 1, 2$) un élément de Λ réduit du type (*) tel que*

$$\Omega_j = ydx - \mu x(1 + C_j(x, y))dy, \quad C_j \in \mathfrak{m}_2, \quad \mu \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}_+.$$

On note h_j l'holonomie de la séparatrice ($y = 0$) de Ω_j , calculée sur une transversale $\Sigma: (x = x_0)$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont holomorhiquement conjugués si et seulement si h_1 et h_2 le sont. De plus si φ est une conjugaison entre les deux holonomies, $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $\varphi^(h_1) = h_2$, il existe un unique élément Φ de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ fibré en x , tel que*

$$\Phi^* \Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi|_\Sigma = \varphi.$$

Remarque 1.2. Si les 1-formes Ω_j sont conjuguées, leurs holonomies aussi, ceci est bien connu.

La preuve du théorème est conséquence des énoncés 1.3 et 1.8 qui suivent.

La proposition 1.3 améliore un résultat de R. Moussu [Mo] et Mattei-Moussu [M, M].

Proposition 1.3. *On considère deux éléments Ω_j de Λ tels que*

$$\Omega_j = ydx - \mu x(1 + A_j(x, y))dy, \quad A_j \in \mathfrak{m}_2, \quad \mu \in \mathbb{R}_-^*.$$

Soit h_j l'holonomie de la séparatrice ($y = 0$) de Ω_j , calculée sur une transversale $\Sigma: (x = x_0)$. Si h_2 est conjugué à h_1 par un difféomorphisme φ de $\Sigma: \varphi^(h_1) = h_2$, il existe Φ élément de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ unique, fibré en x tel que*

$$\Phi^*(\Omega_1) \wedge \Omega_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi|_{\Sigma} = \varphi.$$

Remarque 1.4. R. Moussu [Mo] (voir aussi [M, R]₂) a énoncé la proposition 1.3 dans le cas spécial:

$$\Omega_j = ydx - \mu x(1 + xy C_j(x, y))dy, \quad C_j \in \mathfrak{O}_2, \quad \mu \in \mathbb{R}_-^*$$

et ce type de "forme normale" semble essentiel dans sa démonstration.

Preuve de la proposition 1.3. Soit Ω_j comme dans l'énoncé. D'après [Ca, K, P] et [M, M], Ω_j est conjugué à une 1-forme

$$\Omega_{0,j} = ydx - \mu x(1 + xy B_j(x, y))dy, \quad B_j \in \mathfrak{O}_2.$$

Lemme 1.5. *Il existe un élément $\Phi_{0,j}$ de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ fibré en x tel que $\Phi_{0,j}^*(\Omega_j) \wedge \Omega_{0,j} = 0$.*

Le lemme 1.5 ramène la proposition 1.3 à l'énoncé 1.4 de Moussu.

Preuve du lemme 1.5. Soit Φ_j élément de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $\Phi_j^*(\Omega_j) \wedge \Omega_{0,j} = 0$. Comme $\mu \in \mathbb{R}_-^*$, les axes sont les seules séparatrices lisses de Ω_j . On peut supposer que Φ_j s'écrit:

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, y) &= (x(a_j + h_{1,j}(x, y)), y(b_j + h_{2,j}(x, y))) \quad a_j, b_j \in \mathbb{C}^*; \\ h_{1,j}, h_{2,j} &\in \mathfrak{m}_2. \end{aligned}$$

Quitte à conjuguer $\Omega_{0,j}$ par F_j où $F_j(x, y) = ((1/a_j)x, y)$ on peut prendre $a_j = 1$. On va construire $\Phi_{0,j}$ en composant Φ_j à droite par un élément bien choisi du groupe à un paramètre associé à un champ dual X_j de Ω_j . Soit \tilde{h}_j un élément de \mathfrak{m}_2 tel que

$$\exp(\tilde{h}_j) = 1 + h_{1,j} \text{ et } X_j \text{ le champ dual de } \Omega_j \text{ donné par:}$$

$$X_j = (1/\mu)y(1 + g_j(x, y))\partial/\partial y + x \partial/\partial x, \quad g_j \in \mathfrak{m}_2$$

avec $1 + g_j = (1 + A_j)^{-1}$. Soit $\psi_{j,t}$ le groupe à un paramètre de X_j . On a:

$$\psi_{j,t}(x, y) = ((\exp t)x, y U(t, x, y)), \quad U \in \mathbf{O}_3; \quad U(t, 0, 0) \neq 0.$$

Ce difféomorphisme conserve le feuilletage \mathcal{F}_{Ω_j} feuille par feuille. Remarquons que si $t_j: (x, t) \mapsto t_j(x, y)$ est un élément de \mathfrak{m}_2 alors ψ_{j,t_j} est dans $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. De plus $\psi_{j,t_j}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ pour toute feuille \mathcal{L} de \mathcal{F}_{Ω_j} et par suite $\psi_{j,t_j}^*(\Omega_j) \wedge \Omega_j = 0$.

Soit $t_j = -\tilde{h}_j \circ \Phi_j^{-1}$; le difféomorphisme $\Phi_{0,j} = \psi_{j,t_j} \circ \Phi_j$ convient. \square

Proposition 1.6. *Soit $\Omega = ydx - \mu x(1 + A(x, y))dy$ avec $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $A \in \mathfrak{m}_2$ une 1-forme linéarisable. Alors Ω est conjugué à sa partie linéaire par un difféomorphisme fibré en x .*

Remarque 1.7. La condition de linéarisabilité est automatique lorsque μ est élément de \mathbb{R}_+^* ou $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Preuve de la proposition 1.6. La 1-forme $ydx - \mu xdy$ possède l'intégrale première $xy^{-\mu}$; l'autre forme, Ω , a une intégrale première du type $xy^{-\mu}(1 + V)$ avec V élément de \mathfrak{m}_2 . On a $1 + V = \exp H$ avec $H \in \mathfrak{m}_2$. Le difféomorphisme donné par

$$\Phi(x, y) = (x, y \exp(-H(x, y)/\mu))$$

convient. \square

Corollaire 1.8. *Considérons deux éléments Ω_j de Λ :*

$\Omega_j = ydx - \mu x(1 + A_j(x, y))dy, \quad A_j \in \mathfrak{m}_2, \quad \mu \in (\mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+) \cup (\mathbb{C} - \mathbb{R})$
et soit h_j l'holonomie de la séparatrice ($y = 0$) de Ω_j calculée sur une transversale $\Sigma: (x = x_0)$. Supposons h_2 conjugué à h_1 par un élément φ

de \mathbb{D} , $\varphi^*(h_1) = h_2$. Alors il existe un unique élément Φ de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, fibré en x tel que $\Phi^*(\Omega_1) \wedge \Omega_2 = 0$ et $\Phi|_\Sigma = \varphi$.

Ce corollaire résulte de la remarque 1.7 et du fait que les seuls éléments de \mathbb{D} commutant avec $y \mapsto e^{2i\pi\mu} y$ sont les homothéties, lorsque μ n'est pas rationnel.

2. "Formes normales"

Un élément Ω de $[\Omega_\alpha^{4,2}]$ a la même résolution que $\Omega_\alpha^{4,2}$ (l'arbre de résolution, les singularités de l'éclaté divisé ainsi que ses 1-jets en ces points, sont identiques), quitte à conjuguer Ω par un élément de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$. Cette résolution est la composée de deux éclatements:

$$y = tx; \quad x = tu.$$

Le diviseur exceptionnel D_2 est une chaîne de deux droites projectives P_1 et P_2 qui se coupent transversalement au point $m_0 = P_1 \cap P_2$. Les éclatés divisés de $\Omega_\alpha^{4,2}$ ont pour singularités ce point m_0 et deux autres m_{α_i} ($i = 1, 2$) éventuellement confondues, de coordonnées $(0, \alpha_i)$ dans la carte (t, u) où α_1 et α_2 sont les zéros du trinôme $1 + (\alpha/2)u + u^2$. Les points m_{α_1} et m_{α_2} sont distincts si $\alpha \neq \pm 4$.

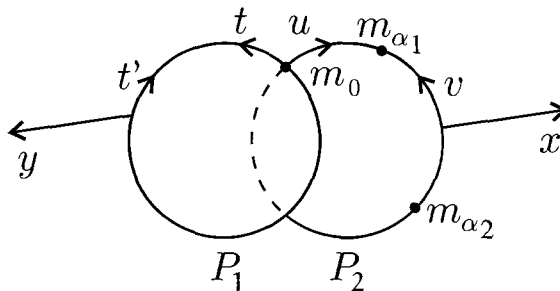


Fig. 3

Soient $\tilde{\Omega}_\alpha^{4,2}$ l'éclaté de $\Omega_\alpha^{4,2}$ dans la carte (t, u) et $\tilde{\Omega}_{\alpha(k)}^{4,2}$ le germe de $\tilde{\Omega}_\alpha^{4,2}$ en $m_k: k = 0, \alpha_1, \alpha_2$.

Supposons $\alpha \neq \pm 4$. Les rapports des valeurs propres du 1-jet des

$\tilde{\Omega}_{\alpha^{(k)}}^{4,2}$ sont respectivement:

$$\begin{aligned} \mu_{(0)} &= -1/2, & \mu_{(\alpha_1)} &= -1/2(1 - \alpha_2/\alpha_1)^{-1}, \\ \mu_{(\alpha_2)} &= -1/2(1 - \alpha_1/\alpha_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi la singularité m_0 est réduite du type (*); les deux autres sont réduites (et alors du type (*)) lorsque $1 - \alpha_2/\alpha_1$ et $1 - \alpha_1/\alpha_2$ ne sont pas dans \mathbb{Q}^* , c'est-à-dire si l'on a la propriété:

$$“\alpha \notin \{\pm 2(\sqrt{r} + 1/\sqrt{r}), r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]\}”.$$

On dit alors que $\Omega \in \Sigma_{2,\alpha}^*$ (en particulier $\alpha \neq \pm 4$).

Lemme 2.1. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$. Il existe un système de coordonnées analytiques où Ω , à unité près, a une écriture du type*

$$\Omega = d(y^2 + x^4) + (ax + by + g)(2ydx - xdy) \quad a, b \in \mathbb{C}; \quad g \in \mathfrak{m}_2^2.$$

Preuve. Compte tenu de l'écriture de $j^1 \tilde{\Omega}$ en m_{α_1} et m_{α_2} , l'équation $\tilde{\Omega} = 0$ possède en ces points des séparatrices lisses \tilde{C}_{α_1} et \tilde{C}_{α_2} tangentes aux droites ($u = \alpha_1$) et ($u = \alpha_2$) respectivement. Leurs images par π : C_{α_1} et C_{α_2} sont des germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ de courbes analytiques lisses tangentes à l'ordre 1 à l'axe ($y = 0$). On peut choisir les coordonnées initiales (x, y) telles que l'on ait $C_{\alpha_1} = (y - ix^2 = 0)$ et $C_{\alpha_2} = (y + ix^2 = 0)$. Comme la courbe $(y^2 + x^4 = 0)$ est finalement une séparatrice commune de Ω et $\Omega_0 = xdy - 2ydx$, suivant Cerveau-Moussu [C, M] on a:

$$\Omega = f_1 d(y^2 + x^4) + f_2(2ydx - xdy), \quad f_i \in \mathbf{O}_2.$$

Puisque $j^1 \Omega$ est équivalent à ydy , f_1 est une unité et $f_2 \in \mathfrak{m}_2$. On peut supposer $f_1 \equiv 1$. □

Considérons un représentant holomorphe noté encore Ω sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^2$ tel que 0 soit la seule singularité. L'équation $\Omega = 0$ définit un feuilletage non singulier, sur $U - \{0\}$. Son image réciproque par π s'étend en un feuilletage singulier $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ à singularités m_k ($k = 0, i, -i$) de coordonnées $(0, k)$ dans la carte (t, u) . Le rapport des valeurs propres en m_k est $\mu_{(k)} = \mathcal{I}_{m_k}(\tilde{\mathcal{F}}, P_2)$, ce dernier étant l'indice de $\tilde{\mathcal{F}}$ relativement à P_2 au point m_k [Ca, S]. On a $\mu_{(0)} = -1/2$

et $\mu_{(k)} = (ak - 2)/8$ pour $k = i, -i$ (le nombre a étant celui du lemme 2.1).

On rappelle que si $\eta = A dx + B dy$ est un élément de Λ ayant $C: (y = 0)$ comme séparatrice, l'indice de Camacho-Sad de \mathcal{F}_η en 0 relativement à C est $([Ca, S])$:

$$\mathcal{I}_0(\mathcal{F}_\eta, C) = -\text{Res}_{x=0} [\partial/\partial y(A/B)(x, 0)].$$

Si $\eta = y(\lambda_2 + A_2)dx - x(\lambda_1 + A_1)dy$ avec $A_j \in \mathfrak{m}_2$ et $\lambda_1 \neq 0$, alors $\mathcal{I}_0(\mathcal{F}_\eta, C) = \lambda_2/\lambda_1$.

Remarquons qu'un élément Ω de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ écrit sous la forme Ω^a est transverse à $\Omega_0 = -2ydx + xdy$ en dehors de la séparatrice $(y^2 + x^4 = 0)$. Par conséquent $\tilde{\mathcal{F}}$ est transverse à la "fibration" de Hopf généralisée de P_2 - donnée par $\tilde{\mathcal{F}}^0$ - en dehors des séparatrices $(u = i)$, $(u = -i)$ et P_1 , où $\tilde{\mathcal{F}}^0$ est le feuilletage obtenu après résolution de Ω_0 . Dans la carte (t, u) (resp. (x, v) où $v = 1/u$) il est donné par les niveaux de u (resp. v), dans la carte (t', y) fig. 3 il a $y \cdot t'^2$ comme intégrale première.

Considérons un élément Ω^a de Λ . Les singularités m_i et m_{-i} sont réduites si et seulement si $a \in (\mathbb{C} - \mathbb{Q}i) \cup (\mathbb{Q} \cap [-2, 2])i$. Lorsque $a = \pm 2i$, l'une des singularités m_i ou m_{-i} est du type (***) avec une valeur propre non nulle, associée à la direction propre P_2 ; ce qui est "mauvais" si on veut des conjugaisons fibrées suivant la fibration de Hopf de P_2 . En fait si $a = \pm 2i$, on n'est plus dans le cas $n = 2p$ (c'est à dire le notre) mais plutôt dans le cas $n > 2p$. Finalement un élément Ω de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ a une écriture du type Ω^a dans un bon système de coordonnées avec $a \in (\mathbb{C} - \mathbb{Q}i) \cup (\mathbb{Q} \cap]-2, 2[)i$.

Dans toute la suite nous travaillerons dans les coordonnées où les éléments de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ s'écrivent sous la forme Ω^a .

3. Classification des éléments Ω de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ via l'holonomie projective

Dans toute la suite \mathcal{L} désigne la feuille $P_2 - \{m_0, m_i, m_{-i}\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\Omega}_{(k)}$ "la" forme définissant le germe de $\tilde{\mathcal{F}}$ en m_k .

On note \underline{u} le point de coordonnées $(0, u)$ dans la carte (t, u) . La représentation d'holonomie projective \mathcal{H}_Ω est la représentation d'holo-

nomie de \mathcal{L} sur une transversale ($u = u_0$):

$$\mathcal{H}_\Omega: \pi_1(\mathcal{L}, \underline{u}_0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0).$$

Son image H_Ω est le groupe d'holonomie projective de Ω . Le difféomorphisme d'holonomie projective locale h_k de la singularité m_k est l'élément $\mathcal{H}_\Omega(\gamma_k)$ où $\gamma_k \in \pi_1(\mathcal{L}, \underline{u}_0)$ est un lacet d'indice δ_j^k (symbole de Kronecker) par rapport à m_j ($j, k \in \{0, i, -i\}$). Le groupe H_Ω est engendré par h_0 et h_i .

Théorème 3.1. *Soit Ω_j ($j = 1, 2$) un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{(j)}$ le feuilletage singulier obtenu après résolution. Les 1-formes Ω_1 et Ω_2 sont holomorphiquement (resp. formellement) conjuguées s'il existe un élément ψ de \mathbb{D} (resp. $\widehat{\mathbb{D}}$) tel que $\psi^*(h_k^{(1)}) = h_k^{(2)}$ pour $k = 0, i$*

$$(H_{\Omega_j} = \langle h_0^{(j)}, h_i^{(j)} \rangle).$$

Preuve. Si les formes sont holomorphiquement conjuguées les holonomies projectives le sont aussi.

Soient

$$\Omega_j = d(y^2 + x^4) + f_j(2ydx - xdy)$$

deux éléments de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ définis sur un voisinage U de $0 \in \mathbb{C}^2$. On suppose qu'il existe un élément ψ de \mathbb{D} tel que $\psi^*(h_k^{(1)}) = h_k^{(2)}$ pour $k = 0, i$. Les holonomies $h_k^{(j)}$ étant calculées sur une transversale $\Sigma: (\mathbb{C}, u_0)$. On va montrer que $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ sont conjugués, donc Ω_1 et Ω_2 aussi.

Lemme 3.2. *Il existe un difféomorphisme fibré $\tilde{\Phi}: \tilde{\Phi}(t, u) = (\varphi(t, u), u)$, entre deux voisinages ouverts V_j de P_2 dans l'espace éclaté \tilde{U} tel que:*

- 1) $\tilde{\Phi}$ envoie les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_{|V_2}^{(2)}$ sur celles de $\tilde{\mathcal{F}}_{|V_1}^{(1)}$
- 2) la restriction de $\tilde{\Phi}$ à la transversale Σ est égale à ψ .

Lemme 3.3. *Le difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ se prolonge sur un voisinage V_3 du diviseur exceptionnel $D_2 = P_1 \cup P_2$, en une conjugaison analytique entre les deux feuilletages singuliers $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$.*

Ainsi en posant

$$\Phi = \pi \circ \tilde{\Phi} \circ \pi_{|\pi(\tilde{U})-\{0\}}^{-1}$$

on obtient un difféomorphisme de conjugaison analytique entre \mathcal{F}_{Ω_1} et \mathcal{F}_{Ω_2} , en dehors de l'origine. Celui-ci se prolonge en 0 en une conjugaison entre Ω_1 et Ω_2 . D'où la version analytique du théorème \square

(En raisonnant sur les k -jets $([C, M])$, (voir aussi $[B, M]$) on établit le théorème dans le cas formel.)

Preuve du lemme 3.2. Les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^{(j)}$ sont transverses à la “fibration” de Hopf généralisée de P_2 , en dehors des séparatrices ($u = i$), ($u = -i$) et du projectif P_1 . Donc on peut étendre ψ par la méthode de relèvement des chemins, suivant la projection $(t, u) \mapsto u$, en un difféomorphisme local $\tilde{\Phi}$ envoyant $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ sur $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$: pour tout couple (t, u) de $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0, i, -i\})$, t de module assez petit, on considère le relevé $C_u^{(2)}$ dans le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ d'un segment $\gamma_{\underline{u}\underline{u}_0}$ de \mathcal{L} d'origine \underline{u} et d'extrémité \underline{u}_0 tel que $C_u^{(2)}(0) = (t, u)$. Puis on relève le chemin $(\gamma_{\underline{u}\underline{u}_0})^{-1}$ dans le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ en un chemin $C_u^{(1)}$ tel que $C_u^{(1)}(0) = (\psi(t_2), u_0)$, où $(t_2, u_0) = C_u^{(2)}(1)$. Soit $(t_1, u) = C_u^{(1)}(1)$; on pose $\tilde{\Phi}(t, u) = (t_1, u)$, ce dernier est indépendant du chemin $\gamma_{\underline{u}\underline{u}_0}$ choisi. D'après le théorème 1.1 appliqué à chacune des trois singularités m_k , il existe au voisinage de m_k un difféomorphisme fibré conjugant les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^{(2)}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ et valant ψ sur Σ . Celui-ci coïncide en dehors de la séparatrice ($u = k$) avec le difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ puisque les “manipulations” qui ont permis de les construire sont les mêmes. \square

Preuve du lemme 3.3. Comme la feuille $P_1 - \{m_0\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}^{(j)}$ est simplement connexe, pour tout disque $D_\eta = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \eta\}$ de $P_1 - \{m_0\}$, η réel positif arbitrairement grand, $\tilde{\mathcal{F}}^{(j)}$ possède une intégrale première holomorphe F_j sur un ouvert U_η fibré via $(t', y) \mapsto t'$ au dessus de D_η :

$$F_j(t', y) = y \cdot U_j(t', y), \quad U_j \in \mathbf{O}_2(U_\eta), \quad U_j(t', 0) \neq 0.$$

D'après le lemme 3.2 le difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ est défini sur une couronne cylindrique $U_{c,\eta,\varepsilon} \cong A_{c,\eta} \times D_\varepsilon$ où $A_{c,\eta}$ est l'anneau $\{t' \in \mathbb{C} \mid c < |t'| < \eta\}$. Introduisons le difféomorphisme Φ_j :

$$\Phi_j(t', y) = (t' \cdot (U_j(t', y))^{-1/2}, y \cdot U_j(t', y)).$$

Il est défini sur un ouvert $D_{\eta'} \times D_{\varepsilon'}$; sa réciproque Φ_j^{-1} envoie F_j sur la projection $(t', y) \mapsto y$ et conserve la "fibration" transverse $\tilde{\mathcal{F}}^0$. Pour conclure il suffit de prolonger $\theta = \Phi_1 \circ \tilde{\Phi} \circ \Phi_2^{-1}$ sur un ouvert $D_{\eta''} \times D_{\varepsilon''}$ pour certains η'' et ε'' , tout en conservant les fonctions $(t', y) \mapsto y$ et $(t', y) \mapsto y \cdot t'^2$. Pour cela posons $\theta(t', y) = (\psi_1(t', y), \psi_2(t', y))$. L'application θ est connue sur un ouvert $U_{c', \eta', \varepsilon'} \cong A_{c', \eta'} \times D_{\varepsilon'}$. Elle conserve l'intégrale première $y \cdot t'^2$ de $\tilde{\mathcal{F}}^0$ et envoie $\Phi_2(\tilde{\mathcal{F}}^{(2)})$ sur $\Phi_1(\tilde{\mathcal{F}}^{(1)})$. On a alors:

$$\begin{aligned} \psi_2(t', y) \cdot \psi_1^2(t', y) &= y \cdot t'^2 \\ \psi_2(t', y) &= \psi_2(y) \end{aligned}$$

$(t', y) \in A_{c', \eta'} \times D_{\varepsilon'}$. Par suite la fonction θ s'étend par cette formule sur $D_{\eta'} \times D_{\varepsilon_1}$ (pour un certain ε_1). Alors $\tilde{\Phi}$ se prolonge au voisinage de P_1 tout en satisfaisant les conditions demandées; d'où le lemme. \square

Définition ([C, M].) Un sous groupe G de \mathbb{D} est dit super rigide si toute conjugaison formelle, entre G et un sous groupe G' de \mathbb{D} quelconque, converge.

Corollaire. Soit Ω un élément de $\Sigma_{2, \alpha}^*$ tel que H_Ω soit super rigide. Alors Ω est rigide.

4. Synthèse

Soit Ω un élément de $\Sigma_{2, \alpha}^*$, il est en général rigide. Quand il ne l'est pas on a $\Omega^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}$, sauf dans des cas exceptionnels où on a seulement $\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$. Ceci sera conséquence des théorèmes 3.1 et 4.4.

L'holonomie de $P_1 - \{m_0\}$ comme variété invariante de $\tilde{\Omega}_{(0)}$ est l'identité car c'est une feuille simplement connexe de $\tilde{\mathcal{F}}$. Par conséquent, $\tilde{\Omega}_{(0)}$ est linéarisable d'après le théorème 3.1. L'holonomie de l'autre variété invariante de $\tilde{\Omega}_{(0)}$ est donc linéarisable. On peut supposer pour toute la suite que $h_0 = -\text{id}_{(\mathbb{C}, 0)}$ (modulo un bon choix de la coordonnée).

Avant d'établir le lien entre Ω^{For} , $(h_0, h_i)^{\text{For}}$ et H_Ω^{For} on va rappeler un résultat de Cerveau-Moussu sur les groupes.

Définition 4.2 ([C, M].) Un sous groupe non abélien de \mathbb{D} est dit ex-

ceptionnel s'il est formellement conjugué à l'un des sous groupes $G_{\omega,p}$ engendrés par:

$$x \mapsto \omega x \quad \text{et} \quad x \mapsto \exp X_{p,0}(x) = x(1 - px^p)^{-1/p}$$

où p est un entier non nul, ω racine $p^{\text{ième}}$ de -1 et $X_{p,\lambda}$ le champ de vecteurs complexe à une dimension:

$$X_{p,\lambda} = (x^{p+1}/(1 + \lambda x^p))\partial/\partial x, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque. Les éléments de $G_{\omega,p}$ s'écrivent:

$$x \mapsto \ell_{m,k}(x) = \omega^m \cdot x(1 - kpx^p)^{-1/p}, \quad m, k \in \mathbb{Z}.$$

Le difféomorphisme $\ell_{m,k}$ est périodique si et seulement si m est impair ou k est nul.

Notations. Soient k, q deux éléments de \mathbb{N}^* , $m \in \mathbb{Z}$ et $(\lambda, \omega) \in \mathbb{C}^2$, avec ω racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité. On désigne par $H_{m,k,q,\lambda}$ le groupe abélien:

$$\langle \omega \exp(m/q)X_{kq,\lambda}, \exp X_{kq,\lambda} \rangle.$$

Théorème 4.3a. ([C, M].) *Soit G un sous groupe de \mathbb{D} . Alors $G \cap \mathbb{D}_1$ est monogène si et seulement si G est formellement conjugué à un groupe $G_{\omega,p}$ (cas non abélien) ou à un groupe $H_{m,k,q,\lambda}$ (cas abélien).*

Théorème 4.3b. ([C, M].) *Un sous groupe G de \mathbb{D} est super rigide dès que $G \cap \mathbb{D}_1$ n'est pas monogène et non trivial. Lorsque G est non abélien et que $G \cap \mathbb{D}_1$ est monogène, le groupe G n'est pas rigide.*

Théorème 4.4. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$.*

i) *Si $\mu_{(i)}$ ne vérifie pas la condition (I): " $\mu_{(i)}$ est irrationnel et $\mu_{(i)} \cdot \mu_{(-i)} < 0$ " alors $\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$. Si de plus H_Ω n'est ni exceptionnel ni formellement conjugué à un groupe $H_{m,k,q,0}$ on obtient $\Omega^{\text{For}} \equiv H_{\Omega}^{\text{For}}$.*

ii) *Lorsque (I) est vérifiée Ω est rigide.*

Preuve. Elle résulte du corollaire 4.9 et de la proposition 4.10. □

Corollaire 4.5. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ tel que H_Ω soit non abélien. Alors Ω est rigide si H_Ω n'est pas exceptionnel. C'est le cas en particulier quand $\mu_{(i)}$ n'est pas rationnel.*

Remarque. L'ensemble des valeurs α pour lesquelles les deux espaces de modules Ω^{For} et H_{Ω}^{For} , dans le théorème, ne s'identifient pas est contenu dans \mathbb{R} .

Corollaire 4.6. “Génériquement” sur α ($:\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$), un élément Ω de $[\Omega_{\alpha}^{4,2}]$ est rigide.

On va d'abord établir le lien entre Ω^{For} et $(h_0, h_i)^{\text{For}}$.

4-a. Correspondance entre Ω^{For} et $(h_0, h_i)^{\text{For}}$

Lemme 4.7. Soit G un sous groupe de \mathbb{D} formellement conjugué à H_{Ω} par un élément $\tilde{\varphi}$ de $\widehat{\mathbb{D}}$: $\tilde{\varphi}^*(H_{\Omega}) = G$. Si pour $k = i, -i$ on a la propriété (Q_k) :

(Q_k) : Le difféomorphisme holomorphe $\tilde{\varphi}^*(h_k)$ est l'holonomie de la séparatrice ($t = 0$) d'une 1-forme:

$$\eta_k = udt - \mu_{(k)} t(1 + B_k(t, u))du, \quad B_k \in \mathfrak{m}_2$$

alors G est réalisé, à conjugaison analytique près, comme groupe d'holonomie projective d'un élément Ω_1 de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ formellement conjugué à Ω . De plus les holonomies projectives locales h_0^1 et h_i^1 des singularités m_0 et m_i de $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ (désingularisation de \mathcal{F}_{Ω_1}) sont égales à $\tilde{\varphi}^*(h_0)$ et $\tilde{\varphi}^*(h_i)$, à conjugaison analytique commune près.

Preuve du lemme 4.7. On utilise la construction de Lins Neto [L] basée sur le théorème de Grauert classifiant les voisinages tubulaires des surfaces de Riemann compactes à classe de Chern négative. Cette construction permet d'obtenir un élément Ω_1 de Λ ayant même résolution minimale que Ω , admettant la courbe $(y^2 + x^4 = 0)$ comme unique séparatrice et ayant G comme groupe d'holonomie projective (à conjugaison analytique près). D'après le lemme 2.1, Ω_1 s'écrit:

$$\Omega_1 = f_1(x, y)d(y^2 + x^4) + g_1(x, y)(2ydx - xdy) \quad f_1, g_1 \in \mathfrak{O}_2.$$

Vu la résolution de Ω_1 , cette 1-forme est une courbe généralisée ($[C, L, S]$) ayant $(y^2 + x^4 = 0)$ comme unique séparatrice. Par suite $\nu(\Omega) = 1$: 1-jet non nul ($[C, L, S]$). Ainsi f_1 est une unité et g_1 s'annule en 0, puisque $\tilde{\mathcal{F}}^{(1)}$ possède une seule singularité sur P_1 . Par conséquent $\Omega_1 \in$

$\Sigma_{2,\alpha}^*$. Or par hypothèse les couples d'holonomies projectives locales (h_0, h_i) et $(h_0^{(1)}, h_i^{(1)})$ sont formellement conjugués.

En vertu du théorème 3.1 les 1-formes Ω_1 et Ω sont formellement conjuguées. \square

Remarque 4.8. Les hypothèses (Q_k) du lemme 4.7 sont vérifiées en général; on distingue essentiellement quatre cas:

- (i) $\mu_{(i)}, \mu_{(-i)} \notin \mathbb{R}$.
- (ii) $\mu_{(i)}, \mu_{(-i)} \in \mathbb{Q}^-$.
- (iii) $\mu_{(i)}, \mu_{(-i)} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^-$.
- (iv) $\mu_{(k)} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^+$ ($k = i$ ou bien $-i$).

Dans les trois premiers cas, les hypothèses (Q_k) sont évidemment satisfaites: (i) est clair car $\tilde{\varphi}^*(h_k)$ est linéarisable, (ii) d'après Martinet-Ramis [M, R]₂ ou Perez Marco-Yoccoz [PM, Y] et (iii) d'après [PM, Y].

Dans le dernier cas on distingue deux possibilités:

Si H_Ω est non abélien, alors il est super rigide, ainsi Ω est rigide. Remarquons que Q_j est vérifiée pour $j = i, -i$.

Si H_Ω est abélien, (Q_k) peut ne pas être satisfaite dans quelques cas (remarque 5.2), cependant Ω est rigide, en effet: $\tilde{\Omega}_{(k)}$ est linéarisable (Poincaré) donc h_k aussi. Ainsi, puisque $\mu_{(i)} \notin \mathbb{Q}$ et que H_Ω abélien, ce dernier est linéarisable. Il en est de même pour H_{Ω_1} dès que Ω_1 est formellement conjuguée à Ω . Ainsi, d'après le théorème 3.1, Ω et Ω_1 sont analytiquement conjuguées. Par conséquent Ω est rigide.

Corollaire 4.9. Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$. Alors Ω^{For} s'identifie à $(h_0, h_i)^{\text{For}}$ sauf peut-être si $\mu_{(i)} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ avec $\mu_{(i)} \cdot \mu_{(-i)} < 0$, auquel cas Ω est rigide.

4-b. Classification des systèmes de générateurs

Ce paragraphe est motivé par l'exemple suivant: on considère les deux systèmes de générateurs $(-x/1-x, x/1-x)$ et $(-x, x/1-x)$ de $G_{-1,1}$. Il existe un unique élément φ de $\widehat{\mathbb{D}}$ tel que $\varphi^*(-x/1-x, x/1-x) = (-x, x/1-x)$. Il est donné par $\varphi(x) = x/(1+x/2)$.

Remarquons que: $\varphi \circ \varphi(x) = x/1+x = (x/1-x)^{-1}$. Soit G un sous

groupe de \mathbb{D} formellement conjugué à $G_{-1,1} : \widehat{N}^*(G) = G_{-1,1}$. Les deux systèmes de générateurs de G :

$$\begin{aligned} & ((\widehat{N}^{-1})^*(-x/1-x), \quad (\widehat{N}^{-1})^*(x/1-x)), \\ & (f_0 = (\widehat{N}^{-1})^*(-x), \quad f = (\widehat{N}^{-1})^*(x/1-x)) \end{aligned}$$

sont conjugués par un unique élément de $\widehat{\mathbb{D}} : (\widehat{N}^{-1})^*(x/(1+x/2))$. Ce difféomorphisme diverge en général puisque l'élément f de \mathbb{D} peut ne pas avoir de racine carré (\tilde{f} tel que $\tilde{f} \circ \tilde{f} = f$) dans \mathbb{D}_1 ; en effet:

La classification analytique des éléments de \mathbb{D} formellement conjugués à $g = x/1-x$ est donnée par des invariants qui sont les coefficients d'une certaine série de Fourier associée à g ([E], [Ma], [V]):

$$\Sigma_g(\omega) = \Sigma_g^+(\omega) + \Sigma_g^-(\omega) = \sum_{n \geq 1} \sigma_n e^{2i\pi n\omega} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{-n} e^{-2i\pi n\omega}.$$

Le fait que f possède une racine carré dans \mathbb{D}_1 pour la composition se traduit par ([Ma], [V]):

$$\sigma_n = 0 \quad \text{si} \quad n \notin 2\mathbb{Z}.$$

La classification analytique de $G_{-1,1}$ est donnée ([C, M]) para les cocycles de $x/1-x$ qui sont équivariants par l'application $x \mapsto -x$, ce qui se traduit par:

$$\sigma_n = \sigma_{-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* ;$$

relation qui est donc différente de celle assurant l'existence d'une racine carrée de f dans \mathbb{D}_1 . Ainsi $G_{-1,1}^{\text{For}}$ ne s'identifie pas à $(-x, x/1-x)^{\text{For}}$.

Proposition 4.10. *Soit (f_1, \dots, f_p) un système de générateurs d'un sous groupe G de \mathbb{D} . On suppose G non exceptionnel et non formellement conjugué à un groupe $H_{m,k,q,0}$. Alors $(f_1, \dots, f_p)^{\text{For}}$ s'identifie à G^{For} .*

Remarque. Les espaces de modules de deux systèmes de générateurs de G s'identifient.

Preuve de la proposition 4.10. Afin d'établir la proposition on va montrer que si $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p)$ est un autre système de générateurs (de G) formellement conjugué à (f_1, \dots, f_p) , il lui est homomorphiquement conjugué. Soit $\hat{\psi}$ un élément de $\widehat{\mathbb{D}}$ tel que $\hat{\psi}^*(f_i) = \tilde{f}_i, i = 1, \dots, p$.

1^{er} cas: G n'est ni abélien ni exceptionnel. Comme G est super rigide (théorème 4.3), $\hat{\psi}$ converge.

2^{ième} cas: G est abélien et l'un des f_i , par exemple f_1 , est à partie linéaire non périodique. Donc f_1 et par suite G , est formellement linéarisable. Ainsi la partie linéaire d'un élément de G le caractérise. Alors $\tilde{f}_i = f_i$, $i = 1, \dots, p$.

3^{ième} cas: G est abélien et les f_i sont tous périodiques. Ici encore G est linéarisable $[M, M]$ et donc $\tilde{f}_i = f_i$ pour tout i .

4^{ième} cas: G est abélien, les f_i sont à partie linéaire périodique et l'un d'eux est non périodique. On a $G \cap \mathbb{D}_1 \neq \{\text{id}\}$.

Si $G \cap \mathbb{D}_1$ est non monogène, G est super rigide d'après $[C, M]$ et $\hat{\psi}$ converge. Supposons maintenant que $G \cap \mathbb{D}_1$ est monogène engendré par un élément h ayant un modèle formel $\exp X_{n,\lambda}$. D'après 4.3a, G est formellement conjugué à un groupe $H_{m,k,q,\lambda}$ (avec $kq = n$): $\widehat{N}^*G = H_{m,k,q,\lambda}$; $\widehat{N} \in \widehat{\mathbb{D}}$. On a:

$$(\widehat{N} \circ \hat{\psi} \circ \widehat{N}^{-1})^* H_{m,k,q,\lambda} = H_{m,k,q,\lambda}.$$

Posons $\hat{\varphi} = \widehat{N} \circ \hat{\psi} \circ \widehat{N}^{-1}$. Comme $\exp X_{kq,\lambda}$ engendre $H_{m,k,q,\lambda} \cap \mathbb{D}_1$, on a nécessairement:

$$\hat{\varphi}^*(\exp X_{kq,\lambda}) = \exp \varepsilon X_{kq,\lambda}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Si $\varepsilon = 1$, $\hat{\varphi}$ commute avec $\exp X_{kq,\lambda}$; d'après $[C, M]$ on a: $\hat{\varphi} = e^{2i\pi r/kq} \cdot \exp X_{kq,\lambda}$ avec $r \in \mathbb{Z}$. Puisque $\omega^{kq} = 1$, $\hat{\varphi}$ commute aussi avec $\omega \exp(m/q)X_{kq,\lambda}$. Ainsi $\hat{\varphi}$ commute avec tout élément de $H_{m,k,q,\lambda}$. Donc pour $i = 1, \dots, p$ on obtient $\hat{\psi}^*(f_i) = f_i$ soit $f_i = \tilde{f}_i$.

Par contre si $\varepsilon = -1$, alors $\lambda = 0$ d'après $[C, M]$, cas exclu par hypothèse. D'où la proposition. \square

5. Précisons sur l'espace des modules

Dans ce paragraphe on étudie H_{Ω}^{For} pour Ω élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$, selon les valeurs de $\mu_{(i)}$. Ceci afin de préciser Ω^{For} . Dans cette étude on distingue

deux cas:

1^o) H_Ω n'est pas abélien

Théorème 5.1. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ non rigide tel que H_Ω ne soit pas abélien. Alors $\mu_{(i)} = p/q$, $p \wedge q = 1$. De plus, ou bien q est impair et h_i non périodique, ou bien $q = 2(2k + 1)$ et h_i périodique.*

Preuve. Comme Ω n'est pas rigide, H_Ω est exceptionnel car non abélien. Ainsi $\mu_{(i)} = p/q$, $p \wedge q = 1$. Il existe $\hat{\varphi}$ élément de $\widehat{\mathbb{D}}$ tel que $\hat{\varphi}^* H_\Omega = G_{\omega,d}$ avec $(d, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}^*$, $\omega^d = -1$.

1-a) q est impair: Un calcul simple montre que $\omega = e^{i\pi/q}$ et $d = (2r + 1)q$, $r \in \mathbb{N}$. Nécessairement h_i est non périodique. En effet on a pour $j = 0, i$:

$$\hat{\varphi}^* h_j = e^{2i\pi\mu(j)} \cdot \exp k_j X_{(2r+1)q,0}, \quad k_j \in \mathbb{Z} \quad (\mu_{(0)} = -1/2).$$

Si h_i est périodique, comme $h'_i(0)$ est une puissance paire de ω , $k_i = 0$. Ceci contredit la non abélianité de H_Ω . Ainsi h_i est non périodique, donc résonnant. Il a un modèle formel $e^{2i\pi p/q} \cdot \exp X_{kq,0}$ avec k impair ($2r + 1 = k$).

On a $\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}} \equiv (\omega, \exp X_{kq,0})^{\text{For}}$. Par suite Ω^{For} s'identifie ($[C, M]$) au sous ensemble de $(\exp X_{kq,0})^{\text{For}}$ formé des cocycles d'Ecallevoronin $(c_0, c_1, \dots, c_{2kq-1})$ équivariants par la rotation $x \mapsto \omega x$.

1-b) q est pair: $q = 2q'$: Un calcul élémentaire montre que $\omega = e^{i\pi/q'}$, $d = (2r + 1)q'$, r entier. On a forcément ($[Me]$) q' impair et h_i périodique. Par suite h_{-i} est nécessairement ($[C, M]$) résonnant avec un modèle formel $e^{2i\pi\mu(-i)} \cdot \exp X_{(2r+1)q',0}$.

On obtient $\Omega^{\text{For}} \equiv (\omega, \exp X_{(2r+1)q',0})^{\text{For}}$. □

2^o) H_Ω abélien

Remarque 5.2. Notons tout d'abord que $\mu_{(i)} \in \mathbb{B}$ si et seulement $\mu_{(-i)} \in \mathbb{B}$.

Soit maintenant Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ avec H_Ω abélien et $\mu_{(i)} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. On s'intéresse à la rigidité de Ω et H_Ω ainsi qu'au lien entre Ω^{For} et $H_\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$.

On a $\Omega^{\text{For}} \equiv (h_0, h_i)^{\text{For}}$ si et seulement les hypothèses (Q_j) ($j = i, -i$) du lemme 4.7 sont vérifiées. Elles le sont lorsque $\mu_{(i)} \in \mathbb{B}$; en effet H_Ω est linéarisable ([Br], [Y]) et il en est de même pour tout groupe G qui lui est formellement conjugué.

Lorsque $\mu_{(i)} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{B}$, H_Ω n'est pas rigide (voir ci-dessous). Si de plus $\mu_{(i)}$ et $\mu_{(-i)}$ sont strictement négatifs, alors $\Omega^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}$ (4.4) et par suite Ω n'est pas rigide. Par contre si $\mu_{(k)}$ est positif ($k = i$ ou bien $k = -i$) alors H_Ω est linéarisable et Ω rigide (remarque 4.8), par conséquent $\Omega^{\text{For}} \not\equiv (h_0, h_i)^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}$.

Montrons donc que si $\mu_{(i)} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{B}$ alors H_Ω n'est pas rigide: Soit $\lambda = 2\mu_{(i)}$. On a $\lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{B}$. On peut supposer que $h_i(x) = e^{2i\pi\mu_{(i)}} \cdot x$ et $h_0(x) = -x$ (à conjugaison analytique commune près). Il existe un élément f de \mathbb{D} non linéarisable ([Y]) qui s'écrit:

$$f(x) = e^{2i\pi\lambda} \cdot x(1 + xk(x)), \quad \text{avec } k \in \mathbf{O}_1.$$

Ce difféomorphisme est formellement conjugué à $e^{2i\pi\lambda} \cdot \text{id}$:

$$\varphi^{-1} \circ (e^{2i\pi\lambda} \cdot \text{id}) \circ \varphi = f, \quad \varphi \in \widehat{\mathbb{D}}.$$

Considérons l'élément f_1 de \mathbb{D} défini par:

$$f_1(x) = e^{i\pi\lambda} \cdot x(1 + x^2 k(x^2))^{1/2}.$$

On a:

$$f(x^2) = (f_1(x))^2.$$

On obtient ainsi un élément f_1 de \mathbb{D} non linéarisable (autrement f le serait: par un simple calcul) et commutant avec $-\text{id}$. Pourtant les deux couples $(-\text{id}, f_1)$ et (h_0, h_i) sont formellement conjugués.

Théorème 5.3. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ tel que H_Ω soit abélien; la 1-forme Ω est non rigide si et seulement si l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite:*

- i) $\mu_{(i)}$ et $\mu_{(-i)}$ sont irrationnels négatifs avec $\mu_{(i)} \notin \mathbb{B}$ ("bien approché" par les rationnels).
- ii) $\mu_{(i)}$ est rationnel et h_i est non périodique.

Preuve. Si i) et ii) sont non vérifiées, Ω est rigide. On s'en convainc facilement. Lorsque i) est vérifiée, H_Ω n'est pas rigide (5.2), Ω non plus vu que $\Omega^{\text{For}} \equiv H_\Omega^{\text{For}}$ (4.4). La proposition qui suit achève la preuve:

Proposition 5.6. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,\alpha}^*$ tel que H_Ω soit abélien. Supposons h_i résonnant, arvec un modèle formel $e^{2i\pi p/q} \exp X_{kq,\lambda}$ avec $p \wedge q = 1$. Alors Ω^{For} s'identifie au sous ensemble de*

$$(e^{2i\pi p/q} \exp X_{kq,\lambda})^{\text{For}}$$

constitué des cocycles d'Ecalte-Voronin équivariants par l'application $x \mapsto -x$.

Preuve. Le sous groupe de H_Ω des éléments tangents à l'identité est monogène, engendré par h_i^q si q est impair (resp. $h_0 \circ h_i^{q'}$ si $q = 2q'$). D'après [C, M] il existe un élément \widehat{N} de $\widehat{\mathbb{D}}$ tel que $\widehat{N}^* H_\Omega$ soit du type

$$\widehat{N}^* H_\Omega = \langle \exp X_{kq,\lambda'}, \omega \exp t X_{kq,\lambda'} \rangle, \quad \lambda' \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C}$$

avec $\omega = e^{i\pi/q}$ (resp. $e^{i\pi/q'}$). Comme $\omega \exp t X_{kq,\lambda'}$ commute avec $\exp X_{kq,\lambda'}$ l'entier kq est pair. On a:

$$\begin{aligned} \widehat{N}^* h_0 &= - \exp t_0 X_{kq,\lambda'}, \quad t_0 \in \mathbb{C} \\ \widehat{N}^* h_i &= e^{2i\pi p/q} \exp t_i X_{kq,\lambda'}, \quad t_i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Par ailleurs $(\widehat{N}^* h_0)^2 = \text{id}$, donc $t_0 = 0$. Ainsi à changement de coordonnées linéaire près, on a

$$\widehat{N}^* H_\Omega = \left\langle -\text{id}, e^{2i\pi p/q} \exp X_{kq,\lambda} \right\rangle, \quad \lambda = \lambda'/t_i.$$

Donc

$$\Omega^{\text{For}} \equiv (-\text{id}, e^{2i\pi p/q} \exp X_{kq,\lambda})^{\text{For}}.$$

Cet espace de modules s'identifie à l'ensemble des cocycles d'Ecalte-Voronin de $e^{2i\pi p/q} \exp X_{kq,\lambda}$ équivariants par: $x \mapsto -x$ ([C, M]). \square

6. Cas spécial

Dans ce paragraphe, on étudie l'espace des modules Ω^{For} des éléments Ω de Λ formellement conjugués à une 1-forme $\Omega_\alpha^{4,2}$ avec $\alpha = 4$, le cas $\alpha = -4$ s'y ramène par changement de coordonnées. Cette fois encore

le feuilletage \mathcal{F}_Ω est réduit après deux éclatements; cependant et contrairement au cas précédent, on obtient une singularité réduite du type (***) qui modifie complètement la classification analytique.

A. Choix d'un bon système de coordonnées

Notation. On note $\Sigma_{2,4}^{**}$ l'ensemble des Ω de Λ formellement conjugués à une 1-forme $\Omega_4^{4,2}$.

Soit Ω un tel élément, on peut supposer qu'il a la même résolution π que $\Omega_4^{4,2}$. Ainsi il se désingularise après deux éclatements et $\tilde{\mathcal{F}}$ possède deux singularités m_0, m_{-1} toutes sur P_2 , avec $P_1 \cap P_2 = \{m_0\}$. Ces deux singularités sont réduites du type (*) et (***) respectivement. Pour m_{-1} la valeur propre nulle est dans la direction P_2 . Ainsi $\tilde{\mathcal{F}}$ possède une séparatrice lisse transverse à P_2 . Par suite Ω admet une séparatrice lisse, d'équation ($y = 0$) dans un bon système de coordonnées.

La classification analytique des éléments de Λ ayant une singularité du type (***) a été faite par Marinet-Ramis dans $[M, R]_1$ pour un type formel donné. L'homonologie de la variété invariante correspondant à la valeur propre non nulle classe analytiquement. Afin d'appliquer les résultats de $[M, R]_1$ au calcul de Ω^{For} , on a besoin, comme dans le cas précédent, d'avoir une "fibration" de base P_2 , transverse à $\tilde{\mathcal{F}}$ en dehors de P_1 et de la séparatrice qui en sont des fibres spéciales; ceci afin de pouvoir "pousser" les conjugaisons.

Proposition 6.A.1. *Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,4}^{**}$, de séparatrice la courbe ($y = 0$). Modulo un changement de coordonnées analytique Ω s'écrit:*

$$(II) \quad \Omega = ydy + (2x + by + g)(2ydx - xdy) \quad b \in \mathbb{C}, \quad g \in \mathfrak{m}_2^2.$$

Remarque. Pris sous cette forme, un élément Ω de $\Sigma_{2,4}^{**}$ est transverse à $\Omega_0 = -2ydx + xdy$ en dehors de la séparatrice ($y = 0$). Par conséquent, $\tilde{\mathcal{F}}$ est transverse à la "fibration" de Hopf généralisée donnée par $\tilde{\mathcal{F}}^0$ (§2), en dehors des séparatrices ($v = 0$) et P_1 , où $v = 1/u$.

Preuve. Comme dans le lemme 2.1 on aboutit à l'écriture

$$\Omega = (y + \psi_1)dy + \psi_2(2ydx - xdy) \quad \psi_2 \in \mathfrak{m}_2, \quad \psi_1 \in \mathfrak{m}_2^2.$$

En appliquant à $y + \psi_1$ les théorèmes des fonctions implicites et de division, puis en utilisant le type de résolution de Ω on obtient une écriture du type:

$$\Omega = (y + x_1^3 \ell(x))dy + \psi(2ydx - xdy)$$

$$\ell \in \mathbf{O}_1, \psi \in \mathbf{m}_2, \psi'_x(0,0) \neq 0.$$

Un calcul simple (voir [Me]) nous permet d'énoncer le lemme:

Lemme 6.A.2. *Il existe un élément ℓ_2 de \mathbf{O}_1 tel que si l'on pose*

$$\Omega_1 = (2ydx - xdy) + x^2 \ell_2(x)dy,$$

alors les 1-formes Ω et Ω_1 sont transverses en dehors de la courbe $C : (y = 0)$.

Remarquons que les courbes $(y = 0)$ et $(x = 0)$ sont deux séparatrices de Ω_1 . D'après Briot et Bouquet, Ω_1 est linéarisable. Dans de bonnes coordonnées C et Ω_1 s'écrivent: $Y = 0$ et $\Omega_1 = 2YdX - XdY$. Comme Ω et Ω_1 sont transverses en dehors de C , Ω s'écrit (à unité près):

$$YdX + (aX + bY - \psi_3)(2YdX - XdY) \quad \psi_3 \in \mathbf{m}_2^2; (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.$$

Quitte à conjuguer par une homothétie, on peut supposer que $a = 2$. \square

Dans toute la suite nous travaillerons dans les coordonnées où les éléments de $\Sigma_{2,4}^{**}$ sont du type (II) ci-dessus.

Après deux éclatements, $y = tx$ et $x = tu$, d'une telle 1-forme Ω on obtient un feuilletage singulier $\tilde{\mathcal{F}}$ défini dans les carts (t, u) et (x, v) , où $t = xv$, par les 1-formes:

$$\tilde{\Omega}_{(0)} = 2udt + t(1 + uf_1)du, \quad f_1 \in \mathbf{O}_2$$

$$\tilde{\Omega}_{(\infty)} = 2v^2 dx - 2x(1 - v/2 + xf_2)dv, \quad f_2 \in \mathbf{O}_2$$

et de singularités m_0 et m_∞ (fig.4), la 1-forme $\tilde{\Omega}_{(0)}$ est du type (*) et $\mathcal{I}_{m_0}(\tilde{\mathcal{F}}, P_2) = -1/2$. Par contre $\tilde{\Omega}_{(\infty)}$ est du type (**) avec une multiplicité d'intersection égale à 2; la droite $(v = 0)$ est la variété invariante associée à sa valeurs propre non nulle. Il existe une écriture adéquate de $\tilde{\Omega}_{(\infty)}$:

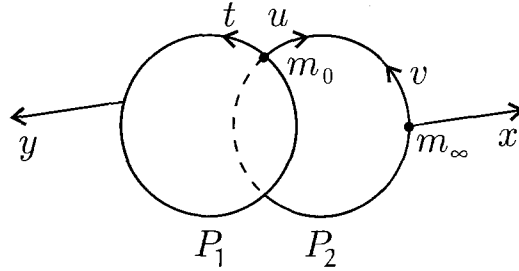


Fig. 4

Lemme 6.A.3. *Il existe Φ , un changement de coordonnées analytique local, en m_∞ , fibré, $(v, x) = \Phi(V, X) = (V, X \ell(X))$ avec $\ell(0) = 1$, tel que l'on ait*

$$\Phi^* \tilde{\Omega}_{(\infty)} = V^2 dX - X(1 + V f_4) dV, \quad f_4 \in \mathbf{O}_2. \tag{6.A.4}$$

Preuve. La forme $\tilde{\Omega}_{(\infty)}$ s'écrit:

$$\tilde{\Omega}_{(\infty)} = v^2 dx - x(1 - (1/2)v + x f_3) dv, \quad f_3 \in \mathbf{O}_2.$$

$$\Phi^*(\tilde{\Omega}_{(\infty)}) = V^2 dX - \frac{X \ell(X)(1 - \frac{1}{2}V + X \ell(X) f_3(X \cdot \ell(X), V))}{(\ell(X) + X \ell'(X))} dV.$$

La relation (6.A.4) s'écrit:

$$\ell(X)(1 + X \ell(X) \cdot f_3(X \ell(X), 0)) = \ell(X) + X \ell'(X).$$

Soit

$$\ell'(X) - \ell^2(X) \cdot f_3(X \cdot \ell(X), 0) = 0.$$

Equation qui admet une unique solution analytique ℓ qui vaut 1 en 0. \square

B. Rappels sur la classification des 1-formes réduites () d'après Martinet-Ramis [M,R]₁**

On désigne par E_p ($p \geq 1$) l'ensemble des éléments de Λ réduits du type (**), de multiplicité d'intersection $p + 1$. D'après Dulac [D], un tel élément est conjugué à une 1-forme η :

$$\eta = x^{p+1} dy - (y + xA) dx \quad A \in \mathbf{O}_2. \tag{6.B.1}$$

On note E'_p l'ensemble des 1-formes de E_p du type (6.B.1) et \widehat{G}_0 le groupe des éléments de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$:

$$(x, y) \mapsto \left(x, \beta y + \sum_{n \geq 1} f_n(y) \cdot x^n \right) \quad \beta \in \mathbb{C}^*.$$

Les fonctions f_n étant holomorphes sur un même disque centré en 0.

Intéressons nous au cas $p = 1$ (ce qui correspond à notre situation).
Soit $G_0 = \widehat{G}_0 \cap \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$.

Proposition 6.B.2. *Deux éléments de E'_1 holomorphiquement conjugués sont G_0 - conjugués, donc le sont par un difféomorphisme fibré,*

$$\Phi(x, y) = (x, \varphi(x, y)), \quad \varphi \in \mathbf{O}_2.$$

Proposition 6.B.3. *Tout élément de E'_1 se ramène via \widehat{G}_0 à une unique 1-forme*

$$\Omega_{p,\lambda} = x^{p+1} dy - y(1 + \lambda x^p) dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

L'espace des modules $E_1 / \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ s'identifie par une bijection canonique R à $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{D}_1$ quotienté par l'action de \mathbb{C}^* définie par:

$$\beta \cdot (\lambda, t, \ell) = (\lambda, \beta t, \beta \ell \beta^{-1}).$$

Si η est un élément de E_1 , la première composante de sa classe dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{D}_1$ est le nombre λ de la forme $\Omega_{p,\lambda}$ (6.B.3) correspondante. La nullité de la deuxième composante signifie que η possède une variété centrale C . On a alors $\mathcal{I}_0(\mathcal{F}_\eta, C) = \lambda$.

C. Classification et calcul de l'espace des modules

Soit Ω un élément de $\Sigma_{2,4}^{**}$. On note h_0 et h_∞ les holonomies projectives locales en m_0 et m_∞ , de la feuille $\mathcal{L} = P_2 - \{m_0, m_\infty\}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$, calculées sur une transversale ($u = u_0$). On a $h_\infty = h_0^{-1}$ et si H_Ω est le groupe d'holonomie projective alors $H_\Omega = \langle h_0 \rangle$. On a encore $h_0^2 = \text{id}$.

Théorème 6.C.1. *Soit Ω_j ($j = 1, 2$) un élément de $\Sigma_{2,4}^{**}$ et $\widetilde{\Omega}_{j(\infty)}$ le germe de 1-forme définissant $\widetilde{\mathcal{F}}_j$ en m_∞ . Alors Ω_1 et Ω_2 sont holomorphiquement conjugués si $\widetilde{\Omega}_{1(\infty)}$ et $\widetilde{\Omega}_{2(\infty)}$ le sont.*

Remarque 6.C.2. Comme dans [C, M], en raisonnant sur les k -jet on aura le même résultat en remplaçant conjugaison analytique par conjugaison formelle.

Preuve de 6.C.1. L'implication "les Ω_j conjugués \Rightarrow les $\tilde{\Omega}_{j(\infty)}$ aussi" est immédiate. Pour l'autre sens: supposons $\tilde{\Omega}_{1(\infty)}$ et $\tilde{\Omega}_{2(\infty)}$ holomorphiquement conjugués.

D'après le lemme 6.A.3 il existe deux difféomorphismes fibrés $\Phi_j: \Phi_j(v, x) = (v, f_j(v, x))$, tels que $\Phi_j^* \tilde{\Omega}_{j(\infty)} = v^2 dx - x(1 + v \cdot g_j) dv$ avec $g_j \in \mathbf{O}_2$.

Ces deux 1-formes $\Phi_j^* \tilde{\Omega}_{j(\infty)}$ sont conjuguées. Or elles appartiennent à E'_1 ; ainsi elles sont conjuguées par un difféomorphisme fibré (6.B.2). Il s'en suit que $\tilde{\Omega}_{1(\infty)}$ et $\tilde{\Omega}_{2(\infty)}$ sont conjugués par un élément fibré Φ de $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0): \Phi(v, x) = (v, g(x, v))$, $g \in \mathbf{O}_2$. La restriction φ de Φ à une transversale ($v = v_0$) conjugue $h_\infty^{(1)}$ et $h_\infty^{(2)}$ donc H_{Ω_1} et H_{Ω_2} . On "pousse", comme au théorème 3.1, Φ au voisinage de P_1 et P_2 en une conjugaison entre $\tilde{\mathcal{F}}_1$ et $\tilde{\mathcal{F}}_2$. Par conséquent Ω_1 et Ω_2 sont conjugués. \square

Soit Ω dans $\Sigma_{2,4}^{**}$. Alors $\tilde{\Omega}_{(\infty)}$ appartient à E_1 et possède \mathcal{L} comme variété centrale avec $\mathcal{I}_{m_0}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) = -1/2$. On note:

$$\left(\tilde{\Omega}_{(\infty)}^{\text{For}}\right)^{\text{cent}} = \{\eta \in E_1 / \eta \stackrel{\text{ft}}{\sim} \tilde{\Omega}_{(\infty)} \text{ et } \eta \text{ a une variété centrale}\} / \stackrel{\text{an}}{\sim}.$$

Cet espace de modules s'identifie par R à $\{-1/2\} \times \{0\} \times \mathbb{D}_1/\mathbb{C}^*$ donc à $\mathbb{D}_1/\mathbb{C}^*$.

Proposition 6.C.3. Soient Θ un élément de E_1 de classe analytique dans $R^{-1}(\{-1/2\} \times \{0\} \times \mathbb{D}_1/\mathbb{C}^*)$ et Ω une 1-forme de $\Sigma_{2,4}^{**}$. Il existe Ω_1 formellement conjugué à Ω tel que $\tilde{\Omega}_{1(\infty)} = \Theta$ (à conjugaison analytique près).

Preuve. La 1-forme Θ s'écrit à conjugaison analytique près:

$$\Theta = v^2 dx - x(1 - v/2 + v \cdot g) dv, \quad g \in \mathbf{m}_2.$$

L'holonomie de la variété centrale ($x = 0$) est conjuguée à $-\text{id}_{\mathbb{C}}$. En adaptant la construction de A. Lins Neto [L] à notre cas, on obtient un élément Ω_1 de Λ , qui a la même résolution que Ω , possède ($y = 0$) comme séparatrice et a la propriété qui suit: le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_1$ (résolution de Ω_1)

possède deux singularités $\mathbf{m}_0: (t = 0, u = 0)$ et $\mathbf{m}_\infty: (x = 0, v = 0)$, telles que $h_0 = -\text{id}$ et $\tilde{\Omega}_{1(\infty)} = \Theta$, à conjugaison analytique près. Pour arriver à Ω_1 formellement conjugué à Ω , on a besoin de construire une fibration "singulière" transverse ($2ydx - xdy = 0$).

Puisque la 1-forme Ω_1 possède $(y = 0)$ comme séparatrice, on a:

$$\Omega_1 = f_1 dy + f_2 \cdot (2ydx - xdy) \quad \text{avec } f_j \in \mathbf{O}_2.$$

On sait que $\tilde{\Omega}_{1(\infty)}$ est réduite du type (**), de multiplicité d'intersection 2 et admet P_2 comme variété centrale. Ceci nous permet de calculer $\nu(\Omega_1)$ par une formule de Camacho-Lins-Sad [Ca, L, S] qu'on rappelle ici:

Rappel [Ca, L, S]. Soient η un élément de Λ et $C: (y = 0)$ une séparatrice de η . On a:

$$\begin{aligned} \eta &= (x^n \ell(x) + y \times f)dy + y \times g \times dx \\ n \in \mathbb{N}^*, \ell &\in \mathbf{O}_1; f, g \in \mathbf{O}_2, \ell(0) \neq 0. \end{aligned}$$

On note $\mu_{\mathcal{F}\eta}(0, C)$ l'invariant analytique n . Si 0 est une singularité du type (*) (resp. (**)) de multiplicité d'intersection p et de variété centrale C) alors $\mu_{\mathcal{F}\eta}(0, C) = 1$ (resp. p). Soit ω un élément de Λ tel que dans sa résolution on n'a pas de composante dicritique, les coins ne sont pas éclatés et sont du type (*). Alors on a

$$1 + \nu(\omega) = \sum_I \mu_{\tilde{\mathcal{F}}\omega}(q, P)$$

où $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ est la résolution de ω , \tilde{S} le lieu singulier, D le diviseur exceptionnel (on a $\tilde{s} \subset D$) et

$$I = \{(q, P) / P \in D, q \in \tilde{S} \text{ et } q \text{ n'est pas un coin}\}.$$

Ainsi $\nu(\Omega_1) + 1 = \mu_{\tilde{\mathcal{F}}_1}(m_\infty, P_2) = 2$. Or P_1 est non dicritique et contient une seule singularité; alors f_2 est dans \mathbf{m}_2 et $f_1 = y + \varphi(x, y)$ avec φ élément de \mathbf{m}_2^2 . D'après 6.A.1, Ω_1 s'écrit à conjugaison près:

$$\Omega_1 = ydy + (2x + b_1y + \psi_1)(2ydx - xdy) \quad b_1 \in \mathbb{C}, \psi_1 \in \mathbf{m}_2^2.$$

Comme $\tilde{\Omega}_{1(\infty)}$ et $\tilde{\Omega}_{(\infty)}$ sont formellement conjugués, Ω_1 et Ω le sont aussi d'après 6.C.2. □

Conclusion 6.C.4. Si Ω est dans $\Sigma_{2,4}^{**}$, l'espace de modules Ω^{For} s'identifie à $(\tilde{\Omega}_{(\infty)}^{\text{For}})^{\text{cent}}$. Donc à $\mathbb{D}_1/\mathbb{C}^*$.

Remarquons que dans ce cas ($\Omega \in \Sigma_{2,4}^{**}$) l'holonomie projective H_Ω ne porte plus d'information sur la classe de Ω dans Ω^{For} , vu que le type analytique de H_Ω est constant. Par contre l'holonomie de la séparatrice classifie:

Théorème 6.C.5. Soient Ω_1, Ω_2 deux éléments de $\Sigma_{2,4}^{**}$ et $h^{(1)}, h^{(2)}$ les holonomies de leur séparatrice commune $C: (y=0)$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont analytiquement conjugués si et seulement si $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$ le sont.

Preuve. Soit $\tilde{\mathcal{F}}_j$ le feuilletage singulier obtenu après résolution de Ω_j ; il est défini en m_∞ par une 1-forme $\tilde{\Omega}_{j(\infty)}$. Notons $\tilde{h}^{(j)}$ l'holonomie de la transformée stricte de C , comme séparatrice de $\tilde{\Omega}_{j(\infty)}$. Les 1-formes Ω_1 et Ω_2 sont conjuguées si et seulement si $\tilde{\Omega}_{1(\infty)}$ et $\tilde{\Omega}_{2(\infty)}$ le sont (6.C.1). Ce qui signifie d'après Martinet-Ramis [M, R]₁ que $\tilde{h}^{(1)}$ et $\tilde{h}^{(2)}$ le sont, ou encore $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$ analytiquement conjugués. \square

References

- [B, M] M. Berthier, R. Moussu: Réservibilité et classification des centres nilpotents. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 44, 2 (1994), 465–494.
- [Br] A.D. Brjuno: Analytical form of differential equations. Trans. Moscou. Math. Soc. 25, 1971, 131–288.
- [Ca, K, P] C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis: The topology of linear flow with singularity. Publ. Math. I.H.E.S. (1978), t. 48, 5–38.
- [Ca, L, S] S. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad: Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. J. Differential Geometry 20 (1984), 143–174.
- [Ca, S] C. Camacho, P. Sad: Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. Ann. of Math. 115, 579–595 (1982).
- [C, Ma] D. Cerveau, J.-F. Mattei: Formes intégrables holomorphes singulières. Société Math. de France, Astérisque 97 (1982).
- [C, M] D. Cerveau, R. Moussu: Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$. Bulletin de la Société Math. de France 116 (1988), 459–488.
- [E] J. Ecalle: Les fonctions résurgentes et leurs applications, II, III. Publications mathématiques d'Orsay, p. 81–06, 85–05.

- [L] A. Lins Neto: Construction of singularities of holomorphic vector fields and foliations in dimension two. *Journal of Differential Geometry* 26 (1987), 1–31.
- [Ma] B. Malgrange: Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques. *Séminaire Bourbaki*, 34^e année, 582 (1981-1982).
- [M, R]₁ J. Martinet, J.-P. Ramis: Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Publ. Math. I.H.E.S.*, t. 55, 1982, 63–124.
- [M, R]₂ J. Martinet, J.-P. Ramis: Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, t. 16 (1983), 571–621.
- [M, M] J.-F. Mattei, R. Moussu: Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, t. 13 (1980), 469–523.
- [Me] R. Meziani: Problème de modules pour des équations différentielles dégénérées de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Thèse de l'Université de Rennes I, 1992.
- [M] R. Moussu: Holonomie evanescente des équations différentielles dégénérées transverses. In *singularities and Dynamical systems*, North Holland 1985, 151–173.
- [Mo] R. Moussu Lettre de Moussu à Martinet.
- [PM, Y] R. Perez Marco, J.-C. Yoccoz: Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite. *Astérisque* 222, 1994.
- [T] F. Takens: Singularities of vector fields. *Publ. Math. I.H.E.S.*, t. 43, (1974), 47–100.
- [V] S. M. Voronin: Classification analytique des germes d'applications conformes $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tangentes à l'identité. *Functional Analysis*, Vol. 15/1, 1981, 1–17.
- [Y] J.-C. Yoccoz: Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 306, série I, p. 55-558, 1988.

R. Meziani

Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences
Département de Math.
B.P. 133
Kenitra - Morocco